

Fonction logarithme

I) Fonction logarithme népérien.

Activité :

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Définition: La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 (c'est-à-dire $\ln(1) = 0$), est appelée la fonction logarithme népérien, cette fonction est notée \ln .

2) En déduire que la fonction \ln est continue et dérivable sur $I =]0; +\infty[$, et que \ln est strictement croissante sur I .

3) Etudier le signe de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$.

4) Montrer qu'il existe un, et un seul, nombre e de l'intervalle $]2,72; 2,73[$ tel que $\ln(e) = 1$.

5) Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = \ln(kx) - \ln(x)$ et $k > 0$.

a- Montrer que f' est nulle, puis en déduire la monotonie de f .

b- Donner $f(1)$, puis en déduire que $\ln(kx) = \ln(k) + \ln(x)$.

c- En déduire que pour tout couple $(a; b)$ de réels strictement positifs et pour tout relatif n on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$;

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln a \quad \text{et} \quad \ln(e^n) = n.$$

6) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

7) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ et donner l'équation de la tangente de (C_{\ln}) au point $A(1; 0)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

8) Considérons la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$.

a) Montrer que la fonction g est croissante sur $[1; +\infty[$.

b) Montrer que la fonction g est minorée par 2, et en déduire que

$$(\forall x \geq 1); 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat, puis calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

9) Etudier la concavité de \ln , puis tracer (C_{\ln}) dans un repère orthonormé.

10) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Montrer que $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et que $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Conséquences

La fonction \ln est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout réel strictement positif on a :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \text{ de plus.}$$

Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(a^n) = n \ln a \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln(e^n) = n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Equations et inéquations

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Limites

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Corollaire : Si u est une fonction dérivable sur I telle que $u(x) \neq 0$ pour tout réel x de I , alors la fonction

$f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $x \mapsto \ln|u(x)| + c$ où c est une constante réelle.

II) Logarithme décimal.

Définition : La fonction logarithme décimal, noté \log , est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

III) Logarithme de base a avec $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Définition : La fonction logarithme de base a , noté \log_a , est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.